$\mathcal{I}(\sqrt{(x-a)(b-x)})$ La sostituzione $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=t$, $x=\frac{bt^2+a}{1+t^2}$, $dx=\frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}$ $\sqrt{(x-a)(b-x)}=\frac{|b-a|t}{1+t^2}$ e l'integrale diventa $2(b-a)|b-a|\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt$. L'integrale è dato da $-\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$. Ora $\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{dtt^2}{(1+t^2)^2}=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{dt}{1+t^2}-2\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$ e quindi $\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$. Alla fine abbiamo ottenuto $\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt=-\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{8}\arctan t+\frac{1}{8}\frac{t}{1+t^2}$. Sostituendo le varie grandezze si ottiene $\frac{1}{4}(b-a)|b-a|\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+\frac{1}{4}\frac{|b-a|}{b-a}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)+C$ che è anche uguale a $\frac{1}{8}(b-a)|b-a|\arcsin\frac{2x-b-a}{b-a}+\frac{1}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)+C$.

Si è usato il fatto che $\frac{1}{2}\arcsin x+\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\pi}{4}$ (la si dimostri)

Un altro tipo di soluzione è la seguente. Si effettua la sostituzione $u=x-\frac{a+b}{2}$ da cui $\int\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2-u^2}du$ e poi $u=\frac{1}{2}(a-b)\cos t$. So ottiene $-\int\frac{1}{4}(a-b)|a-b|\sin t|\sin t|dt$. Supponiamo che $\sin t>0$ e quindi $-\int\frac{1}{4}(a-b)|a-b|\sin t|\sin t|dt=\frac{1}{8}(b-a)|a-b|(t-\sin t\cos t)$. Da $u=\frac{1}{2}(a-b)\cos t$ otteniamo $t=\arccos\frac{2u}{b-a}$ e quindi $\frac{1}{8}(b-a)|a-b|(\arccos\frac{2u}{b-a}-\frac{2u}{a-b}\sqrt{1-\frac{4u^2}{(a-b)^2}})$. Nella variabile x si ottiene $\frac{1}{8}(b-a)|a-b|(\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}-\frac{2x-a-b}{a-b}\sqrt{1-\frac{4u^2}{(a-b)^2}})=\frac{1}{8}(b-a)|a-b|(\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}-\frac{2x-a-b}{a-b}\frac{4}{|a-b|}\sqrt{(x-a)(b-x)})=\frac{1}{8}(b-a)|a-b|\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+\frac{1}{4}(2x-b-a)\sqrt{(x-a)(b-x)}$ Si è usato il fatto che $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ (la si dimostri).

Supporre che $\sin t>0$ non è restrittivo in quanto l'inversione della relazione $u=\frac{1}{2}(a-b)\cos t$ prevede che $0\le t\le\pi$ e quindi il seno è positivo.

Un ulteriore modo di procedere consiste nel sostituire $-x^2+x(a+b)-ab=u$ da cui $x=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2-4u}}{2}$. L'integrale diventa $-\int\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{(a-b)^2-4u}}du$ e con la sostituzione $u=\frac{(a-b)^2\cos^2 t}{2}$ diventa $\frac{1}{8}\int(a-b)^2\frac{\cos t|\cos t|\sin t}{|\sin t|}dt$. Supponendo $\sin t>0$ otteniamo $\frac{1}{8}(a-b)^2\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)$ e procedendo si arriva allo stesso risultato.